デジタルハリウッド大学

2020 年度　一般入学試験　B 方式

数学　［60 分］

【 注 意 事 項 】

1. 試験監督の指示があるまでは、問題冊子は開かないこと。
2. 試験監督から指示があったら、解答用紙に氏名・受験番号を正確に記入し、受験番号マーク欄にも受験番号を正確にマークすること。
3. 試験開始の合図後、この問題冊子を開き、16 ページ（白紙ページ含む）揃っているか確認すること。
4. 乱丁、落丁、印刷不鮮明などがある場合は、手を挙げて試験監督に知らせること。
5. 解答は、すべて別紙の解答用紙の解答欄にマークすること。
6. 試験開始から終了までの間は、試験教室から退出できません。
7. 不正行為を行った場合は、その時点で受験の中止と退室を指示され、同日受験したすべての科目の成績が無効となる。
8. 解答用紙は試験終了後、回収される。問題冊子は持ち帰っても良い。
9. 第 4 問と第 5 問は選択問題である。どちらか 1 問を選んで解答すること。両方解答した場合は、第 4 問と第 5 問の得点は全て無効となる。

第１問（配点 25）

[1] 全体集合 U を $U=\{x \mid x$ は 100 以下の正の整数$\}$ とし，次の部分集合 A,B,C を考える。

$$A=\{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } 12 \text{ の倍数}\}$$

$$B=\{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } 18 \text{ の倍数}\}$$

$$C=\{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は自然数 } p \text{ の倍数}\}$$

集合 A の補集合を $\overline{A}$ と表し，空集合を ϕ と表す。

集合 A の要素の個数を $n(A)$ と表すと，

$n(A)=\boxed{\text{ア}}$　　$n(B)=\boxed{\text{イ}}$

$n(A\cap B)=\boxed{\text{ウ}}$　　$n(A\cup B)=\boxed{\text{エオ}}$

$n\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\boxed{\text{カキ}}$　　$n\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\boxed{\text{クケ}}$

である。

集合 C に対して，$(A\cap B)\cup\overline{C}=U$ となる C の最小の要素は $\boxed{\text{コサ}}$ であり，$(A\cup B)\cap\overline{C}=\phi$ となる C の最大の要素は $\boxed{\text{シ}}$ である。

[2] 樹木の比重を分析する。

比重は単位体積当たりの質量で単位は g/cm^3 であるが，表 1 では比重を 10 倍したものの小数第 1 位を四捨五入してデータ x としている。

出典：ウェブページ 世界の樹種 https://www.mokuzai.com/wspecies/ より。

表 1: 樹木の比重

比重 (x)	樹種数 (n)	nx	$n(x-\bar{x})^2$
4	12	48	81.1
5	32	160	81.9
6	40	240	14.4
7	30	210	4.8
8	20	160	39.2
9	14	126	80.6
10	8	80	92.5
11	2	22	38.7
合計	158	1046	433.2

(1) データ x の平均値 $\bar{x}$ は，小数第 2 位を四捨五入すると $\boxed{\text{ア}}.\boxed{\text{イ}}$ であり，中央値は $\boxed{\text{ウ}}$ で，最頻値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) データ x の第 1 四分位数は $\boxed{\text{オ}}$ ，第 2 四分位数は $\boxed{\text{カ}}$ ，第 3 四分位数は $\boxed{\text{キ}}$ である。よって，四分位範囲は $\boxed{\text{ク}}$ である。

(3) 小数第 2 位を四捨五入すると，データ x の分散は $\boxed{\text{ケ}}.\boxed{\text{コ}}$ である。

第２問（配点 25）

長方形から短辺を一辺とする正方形を切り取ったとき，残った長方形が元の長方形と相似であったとする。

元の長方形の短辺を 1 とすると，長辺は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}+\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，小数第 2 位を四捨五入して近似すると，$\boxed{\text{エ}}.\boxed{\text{オ}}$ である。

長さの比 $1:\dfrac{\boxed{\text{ア}}+\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ は黄金比と呼ばれている。別の方法で黄金比を求めてみる。

$\triangle$ABC は AB $=$ AC の二等辺三角形で，$\angle$CAB $= 36^\circ$，BC $= 1$ とする。

(1) $\angle\mathrm{ABC} = \boxed{\text{カキ}}^\circ$ であるから，この角の二等分線が AC と交わる点を D とすると，△ABC と △BCD は相似であり，△ABD は $\boxed{\text{ク}}$ である。

よって，$\mathrm{AD} = \boxed{\text{ケ}}$ であり，

$$\mathrm{AC} = \frac{\boxed{\text{コ}} + \sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}, \quad \mathrm{CD} = \frac{\boxed{\text{スセ}} + \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

であり，BC : AB と CD : BC が黄金比になっていることがわかる。

ただし，$\boxed{\text{ク}}$ には当てはまるものを下の ⓪〜⑤ のうちから一つ選べ。

⓪ 正三角形
① 鋭角二等辺三角形
② 直角二等辺三角形
③ 鈍角二等辺三角形
④ 正三角形でも二等辺三角形でもない鋭角三角形
⑤ 正三角形でも二等辺三角形でもない鈍角三角形

(2) △ABC を使うと，18° の正弦を求めることもできる。BC の中点を E として直角三角形 ABE を作ると，

$$\sin 18^\circ = \frac{\boxed{\text{チツ}} + \sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。
また，三角比の性質より，0° 以上，180° 以下の角で，

$$\sin 18^\circ = \sin \boxed{\text{ナニヌ}}^\circ = \cos \boxed{\text{ネノ}}^\circ$$

も分かる。

第３問（配点 25）

$\triangle$ABC の辺の長さを $AB = 1$, $BC = \sqrt{7}$, $CA = 2$ とする。

(1) $\cos\angle CAB = \dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ であるから，$\angle CAB = \boxed{エオカ}^\circ$ である。

また，$\sin\angle CAB = \dfrac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ であるから，$\triangle$ABC 外接円の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ケコ}}}{\boxed{サ}}$

である。

(2) 外接円の中心を O と表し，線分 AO の延長と外接円 O の交点のうち

の A と異なる方を D とする。このとき，$\angle ABD = \boxed{シス}^\circ$ であり，

$BD = \dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$ である。

(3) 同様にして，CD $= \dfrac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ が分かるから，四角形 ABDC の

面積は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

(4) 線分 AB と CD を延長して交わる点を E とすると，E は線分 AB を

$\boxed{\text{ネ}}$ へ延長した先にあり，AE $= \boxed{\text{ノ}}$ である。

さらに，直線 EO と外接円の交点で E に近い方を F とすると，

$$\mathrm{EF} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ハヒフ}}} - \sqrt{\boxed{\text{ヘホ}}}}{\boxed{\text{マ}}}$$

である。

ただし，$\boxed{\text{ネ}}$ には当てはまるものを下の ⓪〜① のうちから一つ選べ。

⓪ A から B

① B から A

第４問と第５問のうちのどちらか１問を選んで解答せよ。

第４問（選択問題）（配点 25）

凸正多面体がちょうど五種類存在することを，オイラーの多面体定理を使って証明しよう。

多面体とは，多角形の面からなる図形で，どの辺もちょうど２つの面に含まれており，どの頂点からも少なくとも３本の辺が出ているものである。

凸多面体とは，その内部の２点を結んだ線が多面体に完全に含まれているものをいう。すなわち，へこみのない多面体のことである。

正多面体とは，すべての面が合同な正多角形であり，どの頂点にも同じ数の面が集まっているような多面体である。

オイラーの多面体定理とは，凸多面体の頂点の数を V，辺の数を E，面の数を F とすると，

$$V - E + F = 2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

が成り立つことをいう。

多面体のすべての面を正 n 角形とすると，どの辺も二つの面の構成要素となっているから，

$$\boxed{\text{ア}}\,E = nF$$

である。また，多面体のすべての頂点が m 個の面の構成要素となっているとすると，

$$mV = nF$$

である。

この２式と式　　から，F について解くと，

$$F = \frac{\boxed{\text{イ}}\,m}{2n - nm + 2m} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

となる。

$F>0$ であり，式　　の分子も $\boxed{\text{イ}}\,m>0$ であるから，分母も

$$2n-nm+2m \ > \ 0$$

でなければならない。

$n \geqq 3,\ m \geqq 3$ の条件の下，この不等式を満たす n,m を探そう。

$n=3$ のとき，m を小さい数から示せば，$m=\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ である。

$n=4$ のとき，$m=\boxed{\text{カ}}$ である。

$n=5$ のとき，$m=\boxed{\text{キ}}$ である。

$n \geqq 6$ のとき，不等式を $m<2+\dfrac{4}{n-2}$ と変形すると $m<3$ でなければならないことが分かるので，条件を満たす m は存在しない。

条件を満たした n,m で面の数 F を計算すると，

$n=3,\ m=\boxed{\text{ウ}}$ のとき，$\boxed{\text{ク}}$ に対応する。

$n=3,\ m=\boxed{\text{エ}}$ のとき，$\boxed{\text{ケ}}$ に対応する。

$n=3,\ m=\boxed{\text{オ}}$ のとき，$\boxed{\text{コ}}$ に対応する。

$n=4,\ m=\boxed{\text{カ}}$ のとき，$\boxed{\text{サ}}$ に対応する。

$n=5,\ m=\boxed{\text{キ}}$ のとき，$\boxed{\text{シ}}$ に対応する。

ただし，$\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ には次の ⓪～④ から当てはまるものを 1 つ選べ。

⓪ $F=4$ で正四面体
① $F=6$ で正六面体（立方体）
② $F=8$ で正八面体
③ $F=12$ で正十二面体
④ $F=20$ で正二十面体

第５問（選択問題）（配点 25）

[1] $108x - 11y = 1$ の整数解を求める。ユークリッドの互除法により，

$$108 = \boxed{\text{ア}} \times 11 + \boxed{\text{イ}}$$

$$11 = \boxed{\text{ウ}} \times \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{エ}}$$

$$\boxed{\text{イ}} = \boxed{\text{オ}} \times \boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{カ}}$$

であるから，

$$108 \times \boxed{\text{キ}} - 11 \times \boxed{\text{クケ}} = 1$$

となり，一組の整数解 $x = \boxed{\text{キ}}$，$y = \boxed{\text{クケ}}$ を得る。

よって，k を整数として，一般解は

$$x = \boxed{\text{コサ}}\,k + \boxed{\text{キ}}, \quad y = \boxed{\text{シスセ}}\,k + \boxed{\text{クケ}}$$

である。

また，$108x + 11y = 2$ の整数解で，y が最小の正の整数となるのは

$$x = \boxed{\text{ソタ}}, \quad y = \boxed{\text{チツ}}$$

のときである。

[2] n を $\dfrac{6}{n}$ が規約分数となる正の整数とする。

$\dfrac{6}{n}$ が $\dfrac{2}{7}$ より大きく，$\dfrac{7}{13}$ より小さくなるような n は $\boxed{\text{ア}}$ 個あり，$\dfrac{6}{n}$ が最大となるのは $n = \boxed{\text{イウ}}$ のときである。

$\dfrac{6}{\boxed{\text{イウ}}}$ を小数で表すと，循環小数 $0.\dot{\boxed{\text{エ}}}\boxed{\text{オ}}\boxed{\text{カ}}\boxed{\text{キ}}\boxed{\text{ク}}\dot{\boxed{\text{ケ}}}$ であり，その小数第 50 位は $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{イウ}}$ を 2 進法で表すと $\boxed{\text{サシスセ}}_{(2)}$ で，3 進法で表すと $\boxed{\text{ソタチ}}_{(3)}$ である。