デジタルハリウッド大学

2024 年度　一般選抜　A 方式

数学　［60 分］

【 注 意 事 項 】

1. 試験監督の指示があるまでは、問題冊子は開かないこと。
2. 試験監督から指示があったら、解答用紙に氏名・受験番号を正確に記入し、受験番号マーク欄にも受験番号を正確にマークすること。
3. 試験開始の合図後、この問題冊子を開き、12 ページ（白紙ページ含む）揃っているか確認すること。
4. 乱丁、落丁、印刷不鮮明などがある場合は、手を挙げて試験監督に知らせること。
5. 解答は、すべて別紙の解答用紙の解答欄にマークすること。
6. 試験開始から終了までの間は、試験教室から退出できません。
7. 不正行為を行った場合は、その時点で受験の中止と退室を指示され、同日受験したすべての科目の成績が原則無効となる。
8. 解答用紙は試験終了後、回収される。問題冊子は持ち帰っても良い。

これは2ページ目です。
次のページから問題が始まります。

第１問　（配点 25）

〔1〕 いろいろな集合や条件，命題について，次の問いに答えよ。

(1) 全体集合を 1 から 10 までの整数を要素としてもつ集合，集合 A，B を $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$，$B=\{1,\ 3,\ 6,\ 9\}$ とする。

このとき，集合 $A\cap B=\{\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\}$ である。ただし，

$\boxed{\text{ア}}<\boxed{\text{イ}}$ とする。

また，集合 $\overline{A}\cup B$ の要素の個数は $\boxed{\text{ウ}}$ 個である。

(2) 集合 $P=\{x\,|\,x^2-x-6\leqq 0,\ x$ は実数$\}$ があり，

「条件 p：x が $x\in P$ を満たす実数」，

「条件 q：x が $\boxed{(\ \text{i}\ )}<x<\boxed{(\ \text{ii}\ )}$ を満たす実数」とする。

条件 q は，条件 p であるための必要条件であるが，十分条件ではないとき，$\boxed{(\ \text{i}\ )}$ にあてはまる最も大きな整数は $\boxed{\text{エオ}}$，$\boxed{(\ \text{ii}\ )}$ にあてはまる最も小さな整数は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(3) n を $n>6$ を満たす自然数とする。n が素数ならば，n を 6 で割ったときの余りが 1 か 5 になることを証明する。この命題を証明するために，対偶を考えると，「n を 6 で割ったときの余りが 1 でも 5 でもないならば，n は素数ではない」となる。n を 6 で割ったときの余りが 1 でも 5 でもないとき，すなわち，余りが 0，2，3，4 のときについて，次のように場合分けをして考える。

(i) n を 6 で割ったときの余りが 0 のとき，n は $\boxed{\text{キ}}$ の倍数のため，素数ではない。

（ただし，$\boxed{\text{キ}} \geqq 4$ とする。）

(ii) n を 6 で割ったときの余りが 2 のとき，$n=\boxed{\text{ク}}k+\boxed{\text{ケ}}$ (k は自然数) と表せる。このとき，

$n=\boxed{\text{ク}}k+\boxed{\text{ケ}}=\boxed{\text{ケ}}\left(\boxed{\text{コ}}k+1\right)$ となるため，n は $\boxed{\text{ケ}}$ の倍数であり，$n>6$ であるので，素数ではない。

(iii) n を 6 で割ったときの余りが 3 のとき，$n=\boxed{\text{ク}}k+\boxed{\text{サ}}$ (k は自然数) と表せる。このとき，

$n=\boxed{\text{ク}}k+\boxed{\text{サ}}=\boxed{\text{サ}}\left(\boxed{\text{シ}}k+1\right)$ となるため，n は $\boxed{\text{サ}}$ の倍数であり，$n>6$ であるので，素数ではない。

(iv) n を 6 で割ったときの余りが 4 のとき，$n=\boxed{\text{ク}}k+\boxed{\text{ス}}$ (k は自然数) と表せる。このとき，

$n=\boxed{\text{ク}}k+\boxed{\text{ス}}=\boxed{\text{セ}}\left(\boxed{\text{ソ}}k+\boxed{\text{タ}}\right)$ となるため，n は $\boxed{\text{セ}}$ の倍数であり，$n>6$ であるので，素数ではない。

以上より，対偶が真であることが示せたので，与えられた命題も真である。

〔2〕 次のデータは，あるコンテストの審査結果である。6 人ずつの 2 つのグループに分けて審査が行われ，それぞれ 10 点満点で点数がつけられた。これについて，次の問いに答えよ。なお，答えが割り切れないときは，求める桁の次の位の数字を四捨五入して答えること。

グループ 1

① 7 点　② 9 点　③ 8 点　④ 8 点　⑤ 6 点　⑥ 4 点

グループ 2

① 5 点　② 8 点　③ 10 点　④ 6 点　⑤ 3 点　⑥ 4 点

(1) グループ 1 の平均値は $\boxed{\text{ア}}$ 点，中央値は $\boxed{\text{イ}}$. $\boxed{\text{ウ}}$ 点である。
また，グループ 1 の分散は $\boxed{\text{エ}}$. $\boxed{\text{オカ}}$ である。

(2) グループ 2 の分散は $\boxed{\text{キ}}$. $\boxed{\text{クケ}}$ である。グループ 1 とグループ 2 を比べると，平均値はグループ $\boxed{\text{コ}}$ の方が大きく，標準偏差はグループ $\boxed{\text{サ}}$ の方が大きい。

(3) グループ 1 の採点の際にトラブルがあり，全員に 1 点が加算されることになった。このとき，グループ 1 の平均値は $\boxed{\text{シ}}$ 点になり，分散は $\boxed{\text{ス}}$. $\boxed{\text{セソ}}$ となる。

(4) グループ 2 は同じ 6 人で別のコンテストにも出場することになり，そのコンテストでは 30 点満点で審査が行われるため，予選の成績として，上記の点数をそれぞれ 3 倍した点数を提出した。このとき，平均値は $\boxed{\text{タチ}}$ 点となり，分散は $\boxed{\text{ツテ}}$ となる。

第２問　（配点 25）

四面体 OABC は，$\triangle$OAB $\equiv$ $\triangle$BOC $\equiv$ $\triangle$CBA $\equiv$ $\triangle$ACO で，OA $=$ OB $= a$，$\cos\angle$AOB $= \dfrac{4}{5}$ である。次の問いに答えよ。

(1)　AB $= \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}a$ である。また，$\sin\angle$AOB $= \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，$\triangle$OAB の面積は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}a^2$ である。

(2)　辺 AB の中点を M とする。OM $= \dfrac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シス}}}a$ である。

(3)　頂点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろす。$\cos\angle$OCM $= \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ であり，OH $= \dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツテ}}}a$ である。これより，四面体 OABC の体積は，$\dfrac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}a^3$ と求められる。

(4)　四面体 OABC は，四角形 DEFG が正方形となるような直方体 DEFG－IJKL から三角錐を 4 つ切り取った立体と考えることができる。

$\mathrm{DE} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}a$，$\mathrm{DI} = \dfrac{\boxed{\text{ハ}}\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}}a$ となる。四面体 OABC の体積は，

直方体 DEFG－IJKL の体積の $\dfrac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ であるので，四面体 OABC の体積が，

$\dfrac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}a^3$ となることが確認できる。

(5)　二等辺三角形 PQR は $\mathrm{PQ} = \mathrm{PR}$ で，$\mathrm{QR} = 1$，$\cos\angle\mathrm{QPR} = \dfrac{1}{4}$ である。△PQR と合同な三角形 4 枚を面にもつ四面体の体積は，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{マ}}}}{\boxed{\text{ミム}}}$ である。

第3問　（配点 25）

a を定数とする。放物線　$y=x^2-ax+a-\dfrac{3}{4}$　……(＊)　について，次の問いに答えよ。

(1)　放物線(＊)は，a の値によらず，必ず点$\left(\boxed{\text{ア}},\ \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$を通る。また，

放物線(＊)が原点を通るとき，$a=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2)　放物線(＊)の頂点の座標は$\left(\dfrac{a}{\boxed{\text{カ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{キ}}a^2+\boxed{\text{ク}}a-\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)$である。放物線(＊)が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，

$\dfrac{\boxed{\text{キ}}a^2+\boxed{\text{ク}}a-\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}<\boxed{\text{サ}}$ となる。

また，2 次方程式 $x^2-ax+a-\dfrac{3}{4}=0$ の判別式を D とすると，

$D=a^2-\boxed{\text{シ}}a+\boxed{\text{ス}}$ である。

これらのことから，放物線(＊)が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，a の値の範囲は，$a<\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}<a$ とわかる。

(3)　2 次方程式 $x^2-ax+a-\dfrac{3}{4}=0$ の異なる 2 つの解がともに正であるとき，放物線(＊)の軸の位置から，$a>\boxed{\text{タ}}$ という条件が必要である。また，y 軸との交点の位置から，$a>\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ という条件が必要である。以上より，(＊)の異なる 2 つの解がともに正である a の値の範囲は，$\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}<a<\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{テ}}<a$ である。

(4)　2 次方程式 $x^2-ax+a-\dfrac{3}{4}=0$ が $x<2$ の範囲に 1 つ，$x>2$ の範囲にもう 1 つの解をもつとき，a の値の範囲は，$a>\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

(5)　$a=2$ とする。直線 $y=3x+k$ が放物線(＊)と異なる 2 点で交わるとき，k の値の範囲は，$k>\boxed{\text{ヌネ}}$ である。また，直線 $y=3x+k$ が放物線(＊)と $x>2$ の範囲で異なる 2 点で交わるとき，k の値の範囲は，

$\boxed{\text{ヌネ}}<k<\dfrac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ である。

第４問 （配点 25）

1から10の数が書かれた同じ大きさのボールが1個ずつ, 計10個のボールが入った袋がある。A さん，B さん，C さんの 3 人で次のようなゲームを行う。

・まず，A さんが袋からボールを 1 個取り出す。
・A さんが取り出したボールはもとに戻さず，次に B さんが袋からボールを 1個取り出す。Bさんが取り出したボールも戻さず, 次にCさんが袋からボールを 1 個取り出す。
・ボールに書かれた数が大きい順に 1 位，2 位，3 位とし，1 位は 3 点，2 位は 1 点がもらえる。3 位は 0 点とする。
・以上を 1 回目とし，ボールをすべて袋に戻す。
・同じようにして A さんから順にボールを取り出すことを何回か繰り返す。
・最後に，得点の合計が最も多い人が優勝である。

このゲームについて，次の問いに答えよ。

(1) A さんがはじめに取り出したボールに書かれた数が 4 の倍数である確率は, $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。また，A さんが偶数の書かれたボールを取り出し，B さんが奇数の書かれたボールを取り出す確率は, $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である。3 人とも偶数の書かれたボールを取り出す確率は, $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である。

(2) はじめに A さん，B さんが 1 個ずつボールを取り出し，A さんのボールには 4，B さんのボールには 8 が書かれていた。このあと，C さんがボールを取り出し，この回で C さんが 1 点を得点する確率は, $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(3)　A さんが取り出したボールに書かれた数が 4 であった。この回で，1 位が C さん，2 位が B さん，3 位が A さんとなるボールの取り出し方は全部で $\boxed{\text{サシ}}$ 通りある。

(4)　1 回ずつボールを取り出し終わったとき，A さんが 1 位，B さんが 2 位，C さんが 3 位になる確率は，$\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

3 人が 4 回ずつボールを取り出し終わったとき，A さんの得点は 5 点，B さんの得点は 3 点となった。

(5)　4 回ずつボールを取り出し終わったときの C さんの得点は，$\boxed{\text{ソ}}$ 点である。このとき，A さんは，4 回のうち 2 位を $\boxed{\text{タ}}$ 回とっていて，A さんが 1 位をとった回では，C さんは $\boxed{\text{チ}}$ 位である。4 回ずつボールを取り出し終わり，このような結果となる確率は，$\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テトナ}}}$ である。

(6)　このあと，3 回ずつボールを取り出して，B さんが優勝する確率は，$\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネノ}}}$ である。ただし，同点での優勝はないものとする。